Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
M.Sc. Thor Wittich

Einführung in die Topologie, WiSe 21/22
Blatt 14

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Wir hatten in der Vorlesung und in den Übungen bereits mehrmals behauptet, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(K)$ der Kleinschen Flasche K durch $\langle a, b \mid aba^{-1}b\rangle$ gegeben ist. Zeigen Sie dies.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Sei n eine positive natürliche Zahl. Berechnen Sie die Fundamentalgruppe des Komplementes $\mathbb{R}^3 \setminus \coprod_{i=1}^n (S^1 \times \{i\})$ von n unverschlungenen Kreisen in $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit und seien $x, y \in M$ zwei verschiedene Punkte. Wir schreiben nun $\tilde{M}$ für den Quotientenraum von M der dadurch entsteht, dass wir die beiden Punkte x und y miteinander identifizieren. Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe von $\tilde{M}$ isomorph zu $\pi_1(M) * \mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte):
Sei $i_2 \colon S^1 \to S^1 \times S^1$ die Inklusion des zweiten Faktors und sei X der Pushout von (i_2, i_2).

(i) Berechnen Sie die Fundamentalgruppe von X mit Hilfe des Satzes von Seifert-van Kampen.

(ii) Stellen Sie X als ein (nicht-triviales) Produkt von topologischen Räumen dar und berechnen Sie dadurch erneut die Fundamentalgruppe von X.

(iii) Überzeugen Sie sich davon, dass die beiden soeben berechneten Fundamentalgruppen isomorph sind, indem Sie einen konkreten Isomorphismus angeben.